Απειροστικός Λογισμός ΙΙ 01/04/2019

Ολοκληρώματα Riemann

$F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη $\int_\alpha^b F(x)dx = ;$

$P: \alpha=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$, διαμέριση του $[\alpha,b]$

$U=(F,P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sup_{[x_{i-1},x_i]} F$ άνω άθροισμα της F ως προς την P

$L(F,P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\inf_{[x_{i-1},x_i]} f$ κάτω αθροίσματα της F ως προς την P

- Αν $P'\supseteq P$ η P' ονομάζεται εκλέπτυνση της P

- Αν P_1,P_2 διαμερίσεις του $[\alpha,b]$ τότε η διαμέριση $P_1\cup P_2$ ονομάζεται κοινή εκλέπτυνση των P_1,P_2

Πρόταση ① Αν P' εκλέπτυνση της P $\Rightarrow$ $L(F,P)\le L(F,P')\le U(F,P)\le U(F,P)$

Πρόταση ② Έστω P_1,P_2 διαμερίσεις του $[\alpha,b]$ $\Rightarrow L(F,P_1)\le U(F,P_2)$

- $\underline{\int_\alpha^b} F=\sup_P L(F,P)$ $\overline{\int_\alpha^b} F=\inf U(F,P)$

Πρόταση ③ $\underline{\int_\alpha^b} F\le \overline{\int_\alpha^b} F$

Απόδειξη: Έστω μια διαμέριση P του $[\alpha,b]$. Τότε $\forall$ διαμέριση P_1 του $[\alpha,b]$ έχω $L(F,P_1)\le U(F,P)\Rightarrow$ $\sup_A L(F,P_1)\le U(F,P)\Rightarrow \underline{\int_\alpha^b} F\le U(F,P)$

$\forall$ διαμέριση P του $[\alpha,b]$ $\Rightarrow$ $\underline{\int_\alpha^b} F \leq \inf_P U(F,P) = \overline{\int_\alpha^b} F$

$\underline{\int_\alpha^b} F = \sup\{L(F,P)\ P$ διαμέριση του $[\alpha,b]\}$

<u>Ορισμός</u> Η F λέγεται Riemann ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,b]$ αν $\underline{\int_\alpha^b} F = \overline{\int_\alpha^b} F$ και τότε ορίζουμε $\int_\alpha^b F(x)dx = \underline{\int_\alpha^b} F = \overline{\int_\alpha^b} F$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: [ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΑΤΟΣ ΤΟΥ RIEMANN]
Η F είναι ολοκληρώσιμη αν-αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ διαμέριση P_ε του $[\alpha,b]$, τ.ω $U(F,P_i) - L(F_i,P_\varepsilon) < \varepsilon$

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>: Η F είναι ολοκληρώσιμη αν-αν υπάρχει υπακολουθία διαμερίσεων P_n του $[\alpha,b]$ τω $U(F,P_n) - L(F,P_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$
Επίσης αν $\lim_{n\to\infty} U(F,P_n)$ υπάρχει η $\lim_{n\to\infty} (F,P_n)$ υπάρχει (στην περίπτωση όπου $U(F,P_n) - L(F,P_n)\} \to 0$) τότε υπάρχουν και τα δύο και $\int_\alpha^b F(x)dx = \lim U(F,P_n)$

$\lim_{n\to\infty} L(F,P_n)$

<u>Απόδειξη</u>: [Με βάση το προηγούμενο θεώρημα] Έστω ότι F είναι ολοκληρώσιμη. Για $\varepsilon = 1/n$, $\exists$ διαμέριση $P_\varepsilon = P_{1/n} = Q_n$ τ.ω $0 \leq U(F,Q_n) - L(F,Q_n) < \frac{1}{n}$
<u>ισοσυγκλίνουσες</u> $U(F,Q_n) - L(F,Q_n) \to 0$. Έστω ότι $\exists$ ακολουθία διαμερίσεων $\{P_n\}$ τ.ω $U(F,P_n) - L(F,P_n) \to 0$
Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $n \geq n_0$
$U(F,P_n) - L(F,P_n) < \varepsilon$
$\Rightarrow U(F, \underset{P_\varepsilon}{P_{n_0}}) - L(F, \underset{P_\varepsilon}{P_{n_0}}) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Άρα F ολοκληρώσιμη

Έστω ότι $U(F,P_n) - L(F,P_n) \to 0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} U(F,P_n) = L \in \mathbb{R}$ Όμως $\overline{\int_\alpha^b} F \le U(F,P)$

$\forall$ διαμέριση P του $[\alpha,b]$ $\Rightarrow \overline{\int_\alpha^b} F \le U(F,P_n)$

$$\Rightarrow \overline{\int_\alpha^b} F \le L$$

Όμως $\underline{\int_\alpha^b} F \ge L(F,P)$ $\forall$ διαμέριση P του $[\alpha,b]$

$$\Rightarrow \underline{\int_\alpha^b} F \ge L(F,P_n) \Rightarrow \underline{\int_\alpha^b} F \ge L \quad \left(\overline{\int_\alpha^b} F \le L\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_\alpha^b} F = L = \overline{\int_\alpha^b} F(x)\,dx$$

Απόδειξη του κριτηρίου Ολοκληρώματος του Riemann

($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon>0$ και υποθέτουμε ότι $(\forall \varepsilon>0)$ $\exists P_\varepsilon$ του $[\alpha,b]$ τ.ω $U(F,P_\varepsilon) - L(F,P_\varepsilon) < \varepsilon$) Έχουμε ότι $\exists P_\varepsilon$ διαμέριση P_ε του $[\alpha,b]$ τ.ω

$$\underset{\overline{\int_\alpha^b} F}{\underset{\vee|}{U(F,P_\varepsilon)}} < \underset{\underline{\int_\alpha^b} F+\varepsilon}{\underset{\wedge|}{L(F,P_\varepsilon)}} + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{\int_\alpha^b} F < \underline{\int_\alpha^b} F + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \overline{\int_\alpha^b} F \le \underline{\int_\alpha^b} F \xrightarrow{\underline{\int_\alpha^b} F \le \overline{\int_\alpha^b} F} \underline{\int_\alpha^b} F = \overline{\int_\alpha^b} F \Rightarrow F \text{ ολοκληρώσιμη}$$

$\Rightarrow$ Εστω οτι F ειναι ολοκληρωσιμη $\Rightarrow \underline{\int_a^b} F = \overline{\int_a^b} F$

• $\underline{\int_a^b} F = \sup\{L(F,P) : P$ διαμεριση του $[a,b]\} \Rightarrow$

$\exists$ διαμεριση P_1 του $[a,b]$ τ.ω $\underline{\int_a^b} F < L(F,\overset{P_1(\varepsilon)}{\overset{\shortparallel}{P_1}}) + \frac{\varepsilon}{2}$

• $\overline{\int_a^b} F = \inf\{U(F,P) : P$ διαμεριση του $[a,b]\} \Rightarrow$

$\exists$ διαμεριση $P_2 = P_2(\varepsilon)$ του $[a,b]$ τ.ω $\overline{\int_a^b} F > U(F,P_2) - \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

$$\underset{\underset{L(F,P_1 \cap P_2)+\frac{\varepsilon}{2}}{\wedge|}}{L(F,P_1)+\frac{\varepsilon}{2}} > \underline{\int_a^b} F = \overline{\int_a^b} F > U(F,P_2) - \frac{\varepsilon}{2} \geq U(F, \overset{P_\varepsilon}{\overset{\shortparallel}{P_1 \cup P_2}}) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$P_1 \cap P_2 = P_\varepsilon$

$\Rightarrow U(F,P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(F,P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow U(F,P_\varepsilon) \leq L(F,P_\varepsilon) + \varepsilon$

Αη 1
Εστω $A \subseteq \mathbb{R}$. M άνω φράγμα του A ή κάτω φράγμα του A. $M = \sup A$ αν-αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ τ.ω $M < a + \varepsilon$

$m = \inf A$ αν-αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a' \in A$ τ.ω $m > a' + \varepsilon$

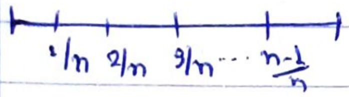
<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> [Κρ. ολοκληρωσιμοτητας Riemann - Ισοδυναμη διατυπωση]
Εστω $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια φραγμενη συναρτηση. Η F ειναι ολοκληρωσιμη αν-αν $\exists$ ακολουθια $\{P_n\}$ διαμερισεων του $[a,b]$ τ.ω $U(F,P_n) - L(F,P_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Μαλιστα αν ~~.....~~ αν $U(F,P_n) - L(F,P_n) \longrightarrow 0$

και $\lim_{n\to\infty} U(F,P_n)$ ή $\lim_{n\to\infty}(L,P_n)$ υπάρχει $\Rightarrow \int_a^b F(x)dx =$

$= \lim_{n\to\infty} U(F,P_n) = \lim L(F,P_n)$

<u>Παράδειγμα</u> 1 $F(x)=x \ , x\in[0,1]$

Είναι ολοκληρώσιμη και αν ναι ποια είναι η τιμή του ολ;



$$U(F,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} F$$

$$L(F,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]} F$$

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$P_n: 0 = x_0 < \frac{1}{n} = x_1 < \dots < \frac{n-1}{n} = x_{n-1} < 1 = x_n$$

$x_i = \frac{i}{n} \ , i=0,1,\dots,n$

F αύξουσα $\Rightarrow$
$\sup_{[x_{i-1},x_i]} F = F(x_i)$
$\inf_{[x_{i-1},x_i]} F = F(x_{i-1})$

$$U(F,P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} F(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{1}{n^2}\frac{(n+1)n}{2} \xrightarrow{n\to\infty} 1/2$$

$$L(F,P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\,\frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i-1 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow U(F,P_n) - L(F,P_n) \to 0 \Rightarrow F$ ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$
$\int_0^1 F(x)dx = \frac{1}{2}$

② $F(x) = \sqrt{x}$ $\quad x \in [0,1]$

$P_n \quad 0 = x_0 < \left(\frac{1}{n}\right)^2 = x_1 < \dots < \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = x_{n-1} < (1)^2 = x_n$

$x_i = \frac{1}{n} \qquad i = 0, 1, \dots, n$

F αύξουσα $\Rightarrow \sup_{[x_{i-1}, x_i]} F = F(x_i) = \sqrt{x_i} = \frac{i}{n}$

$\inf F_{[x_{i-1}, x_i]} F = F(x_{i-1}) = \sqrt{x_{i-1}}$

$$U(F, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \right) \cdot \frac{i}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1(2i-1)}{n^2} \frac{i}{n}$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (2i^2 - i) = \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{2}{3}$$

$$L(F, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \right) \frac{i-1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2} \cdot \frac{i-1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (2i^2 - 3i + 1)$$

$$\Rightarrow U(F, P_n) - L(F, P_n) \longrightarrow \frac{1}{n^3} \sum_{i=1} (2i - 1)$$

$$= \frac{1}{n^3} \left(2 \frac{n(n+1)}{2} - n \right) \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη

Τύπος (ΑπΙ): $1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1) \dots (2n+1)}{6} \Rightarrow \sum_{i=1} (2i^2 - i)$

$$\| \quad \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}$

③ $F: [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = c \quad \forall x \in [\alpha, b]$

• Η F είναι ολοκληρώσιμη και $\int_\alpha^b F(x) dx = c(b-\alpha)$

Έστω $P_n: \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$U(F,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$ τηλεσκοπικό

$c(x_n - x_0) = c(b-\alpha) \longrightarrow c(b-\alpha)$

$L(F,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i) c = c(b-\alpha) \to c(b-\alpha)$

$\Rightarrow U(F-P_n) - L(F-P_n) \to 0 \Rightarrow F$ ολ/μη

και $\int_\alpha^b F(x) dx = c(b-\alpha)$

④ $F(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$

Έστω $P_n = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Επειδή στο $[x_{i-1}, x_i]$ υπάρχει ένας ρητός

$\exists\, \xi \in [x_{i-1}, x_i]$ τ.ω $F(\xi) = 1$

$\Rightarrow \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = 1$ Ομοίως $\exists\, \xi' \in [x_{i-1}, x_i]$

τ.ω $F(\xi') = 0 \to \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = 0$

$U(F, P_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$

$\forall$ διαμέριση P

$L(F,P_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0$ $\forall$ διαμέριση P

Άρα $U(F,P_n) - L(F,P_n) \to 1 \neq 0$

$\forall$ ακολουθία διαμερίσεων $\{P_n\}$ του $[0,1]$

<u>2ος ΤΡΟΠΟΣ:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\int_0^1} F = \inf\{U(F,P) : P \text{ διαμέριση του } [0,1]\} = 1 \\ &\underline{\int_0^1} F = \sup\{L(F,P) : P \text{ διαμέριση του } [0,1]\} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \underline{\int_0^1} F = 0 < 1 = \overline{\int_0^1} F \Rightarrow F$ όχι ολοκληρώσιμη